# Teoría matemática de los palíndromos

Pablo Villanueva Domingo

17 de septiembre de 2020

## Índice



*Es cierto que un matemático que no tenga también algo de poeta nunca será un matemático perfecto.*

Karl Weierstrass

*No puedes encontrar la verdad con la lógica si no la has encontrado ya sin ella.*

G. K. Chesterton

## 1. Introducción

Se conocen como *palíndromos* (del griego *palin dromein*, "volver a ir atrás") aquellas frases que se leen igual de izquierda a derecha que en sentido contrario. Multitud de estas oraciones son conocidas en la cultura popular *Dábale arroz a la zorra el abad, Amor a Roma...* También se pueden considerar palíndromos otras sucesiones de símbolos que se lean igual en sentido contrario, como por ejemplo con números o sílabas como unidades mínimas. El concepto se puede extender, además, a sucesiones de notas musicales o de nucleótidos en secuencias de ADN. En estas notas, formalizaremos matemáticamente el concepto de palíndromo y demostraremos algunos teoremas y propiedades generales que se pueden derivar de ellos.

## 2. Definiciones y propiedades generales

Introduzcamos ahora una serie de definiciones para formalizar el concepto de palíndromos.

### 2.1. Alfabetos

Llamamos *alfabeto* al conjunto de posibles letras o caracteres, y los denotamos como $\mathcal{C}$. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las frases, es decir, de sucesiones de letras. No tendremos en cuenta el sentido semántico en ningún idioma de estas frases. Una frase puede estar formada por una sola letra. Denotaremos los caracteres con letras griegas, y las frases con letras latinas mayúsculas. Por ahora, no incluiremos la estructura de "palabra", sino solo carácter y frase.

Para nuestros ejemplos, emplearemos diferentes tipos de alfabeto, tomando distintos tipos de unidad mínima, para jugar con muestras más diversas de palíndromos. Denotaremos el abecedario latino con $\mathcal{L}$, el conjunto de números naturales con $\mathbb{N}$, y el conjunto de sílabas en el castellano con $\mathcal{S}$. Los palíndromos con números se conocen como capicúas. Usar sílabas como unidad mínima no se suele considerar palíndromo, pero para dichos ejemplos emplearemos el mismo término.

### 2.2. Suma de letras y frases

Para los resultados posteriores sobre palíndromos, nos será necesario formalizar el concepto de yuxtaposición de caracteres y frases, mediante una operación que llamaremos genéricamente como *suma*. En concreto, podemos definir tres tipos diferentes de suma, según los dominios que tomemos. Abusando de la notación, denotaremos las tres sumas con el símbolo $+$, pues generalmente lo omitiremos. Definimos la *suma de letras* como la yuxtaposición de las mismas para formar una frase:

$$\begin{aligned} +\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\to \mathcal{F} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha + \beta = \alpha\beta. \end{aligned}$$

Por otro lado, la *suma de frases* produce otra frase diferente:

$$\begin{aligned} +\colon \mathcal{F} \times \mathcal{F} &\to \mathcal{F} \\ (A, B) &\mapsto A + B = AB. \end{aligned}$$

Por último, la *suma de una letra y una frase* (por la izquierda) produce una nueva frase:

$$\begin{aligned} +\colon \mathcal{C} \times \mathcal{F} &\to \mathcal{F} \\ (\alpha, B) &\mapsto \alpha + B = \alpha B. \end{aligned}$$

La anterior definición corresponde a una suma de una letra por la izquierda, definiéndose de forma análoga por la derecha. Los tres tipos de suma son leyes asociativas. Nótese que el grupo $\mathcal{F}$ con la suma de frases posee estructura de semigrupo $(\mathcal{F}, +)$, pues consta de ley de composición interna asociativa. No es monoide ni grupo ya que no tiene elemento neutro ni inverso. Rigurosamente, la suma de letras, suma de frases y suma de letras y frase son dos operaciones diferentes, pero hablaremos de suma genéricamente, pues no cabe confusión posible. Estas operaciones no son conmutativas ($AB \neq BA$ en general). Por ejemplo, las letras $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$ pueden formar las frases $\alpha\beta, \beta\alpha, \alpha\alpha\alpha \in \mathcal{F}$, entre otras infinitas opciones. Podemos aplicar la notación del sumatorio para la suma de letras y frases, por ejemplo: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1\alpha_2 ... \alpha_{n-1}\alpha_n$, con $n \in \mathbb{N}$. Toda frase se puede descomponer como una sucesión de sumas de letras.

### 2.3. Conjugación

Definimos la *conjugación* como la operación de leer una frase en sentido contrario, es decir, de derecha a izquierda. Por ejemplo, las palabras conjugadas de *social* y *amor* son *laicos* y *Rom*a respectivamente. Denotamos al conjugado de $A$ con un apóstrofe: $A'$. Al conjugar no tendremos en cuenta los signos de puntuación, tildes ni espacios. Matemáticamente, podemos definir esta operación de la siguiente manera:

**Definición 1.** Sean $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathcal{C}$ para $n \in \mathbb{N}$. Formamos la palabra $A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}\alpha_n$. Entonces, el conjugado de $A$ se define como $A' = \sum_{i=n}^{1} \alpha_i = \alpha_n\alpha_{n-1}...\alpha_2\alpha_1$

Sea $A \in \mathcal{F}, \alpha \in \mathcal{C}$. Se cumplen las siguientes propiedades triviales:

- $A'' = A$ (propiedad involutiva).
- $\alpha' = \alpha$ (idempotencia en letras).

### 2.4. Palíndromos

Un *palíndromo* se define como cualquier frase que se lee igual de derecha a izquierda. Denotamos al conjunto de palíndromos como $\mathcal{P}$. Por tanto, $A$ es palíndromo $\Leftrightarrow A \in \mathcal{P}$. En términos más precisos:

**Definición 2.** Sea $A \in \mathcal{F}$. $A$ es palíndromo $\Leftrightarrow A' = A$

Con las definiciones y propiedades anteriores podemos demostrar los siguientes teoremas:

**Teorema 1.** *Sean $A, B \in \mathcal{F}$. Entonces, $(AB)' = B'A'$*

*Demostración.* Trivial: descomponemos $A$ y $B$ en letras: $A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, B = \sum_{i=1}^{m} \beta_i$, con $n, m \in \mathbb{N}$. Su suma es $AB = \alpha_1...\alpha_n\beta_1...\beta_m$. Por tanto $(AB)' = \beta_m...\beta_1\alpha_n...\alpha_1 = B'A'$. □

A partir del teorema anterior, tenemos los siguientes corolarios:

**Corolario 1.1.** *Sea $A \in \mathcal{F}$, $\alpha \in \mathcal{C}$. $(A\alpha)' = \alpha A'$.*

**Corolario 1.2.** *Sea $A \in \mathcal{F}$. $AA'$ es palíndromo.*

**Corolario 1.3.** *Sea $A \in \mathcal{F}$, $\alpha \in \mathcal{C}$. $A\alpha A'$ es palíndromo.*

Nótese que la suma de palíndromos no tiene porqué ser palíndromo. Sin embargo, la suma de un palíndromo consigo mismo sí es palíndromo: $P \in \mathcal{P}$. $(PP)' = PP$. El siguiente teorema es de gran relevancia para formar nuevos palíndromos:

**Teorema 2.** *Sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces, $ABA' \in \mathcal{P} \; \forall \, B \in \mathcal{P}$.*

*Demostración.* Trivial: $(ABA')' = A''B'A' = ABA'$. □

El anterior teorema indica que un palíndromo entre frases conjugadas forma un nuevo palíndromo. Veamos unos ejemplos con distintos alfabetos.

**Ejemplo 1.** $\mathcal{C} = \mathcal{L}$.
*Más ojo, Sam.*
*Nada, yo soy Adán.*
*Atar a la rata.*

**Ejemplo 2.** $\mathcal{C} = \mathbb{N}$. *1234321*

**Ejemplo 3.** $\mathcal{C} = \mathcal{S}$. *La pata, mamá, tápala.*

## 3. Descomposición de palíndromos

Todo palíndromo se puede descomponer, o bien como la suma de dos frases conjugadas, o bien como dos frases conjugadas conectadas por otra frase de una letra. Este hecho se puede formalizar de la siguiente manera:

**Teorema 3.** $\forall A \in \mathcal{P}, (\exists B \in \mathcal{F} \ : \ A = BB') \ \vee \ (\exists B \in \mathcal{F}, \alpha \in \mathcal{C} \ : \ A = B\alpha B')$

*Demostración.* Descomponemos la frase en letras, $A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, con $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathcal{C}$ para $n \in \mathbb{N}$. Su conjugado es $A = \sum_{i=n}^{1} \alpha_i$. En este punto hay que diferenciar dos casos, según la paridad del número de caracteres de la frase $A$. Si $n$ es par, para que se cumpla $A = A'$, debe satisfacerse $\alpha_1 = \alpha_n, \alpha_2 = \alpha_{n-1}$, hasta $\alpha_{n/2} = \alpha_{n/2+1}$. Por tanto, si denotamos $B = \sum_{i=1}^{n/2} \alpha_i$, vemos que $A = BB'$. Por otra parte, si $n$ es impar, se satisface $\alpha_1 = \alpha_n, \alpha_2 = \alpha_{n-1}$, hasta $\alpha_{(n+1)/2-1} = \alpha_{(n+1)/2+1}$, mientras que $\alpha_{(n+1)/2}$ no tiene ninguna restricción. Si a esta letra la denotamos como $\alpha$ y $B = \sum_{i=1}^{(n+1)/2-1} \alpha_i$, vemos que se cumple $A = B\alpha B'$. $\square$

Siguiendo la idea de la demostración anterior, hablaremos de palíndromos *pares* e *impares* según tengan un número par o impar de letras, y puedan descomponerse de uno u otro modo. Nótese que en un palíndromo par, cada letra aparece por duplicado, mientras que en uno impar, hay una letra que aparece solo una vez.

## 4. Generación de palíndromos

A partir de un palíndromo impar, o equivalentemente, a partir de una frase y una letra, podemos formar (infinitos) nuevos palíndromos diferentes. Sea $P \in \mathcal{P}$ impar. Descomponemos $P = A\alpha A'$, donde llamaremos a $A \in \mathcal{F}$ y $\alpha \in \mathcal{C}$ las *semillas.* Para ejemplificarlo, pongamos el caso $P =$ *Más, y Sam*, con $A =$*Más*, $\alpha =$ *y*, con signos de puntuación arbitrarios para conservar un sentido semántico. Según el número de veces que aparezcan la frase y letra semillas, podemos clasificar los posibles palíndromos derivados de estas. Para un palíndromo inicial par, es equivalente, salvo por los casos que incluyen la letra intermedia. La frase semilla $A$ debe aparecer siempre con su conjugada $A'$, pero la letra $\alpha$ puede aparecer un número impar de veces. Con solo apariciones de $\alpha$, y ninguna de $A$ y $A'$, podemos obtener los palíndromos triviales $\alpha$, $\alpha\alpha$, $\alpha\alpha\alpha$... que no incluiremos en el siguiente listado, exigiendo al menos una aparición de $A$.
Con solo una aparición de $A$ y $A'$ y ninguna de $\alpha$:

- $AA'$ (*Más, Sam*).
- $A'A$ (*Sam, más*).

Con solo una aparición de $A$, $A'$ y $\alpha$:

- $A\alpha A'$ (*Más, y Sam*).
- $A'\alpha A$ (*Sam, y más*).

Con solo una aparición de $A$, $A'$ y dos de $\alpha$:

- $\alpha AA'\alpha$ (*Y más, Samy*).
- $\alpha A'A\alpha$ (*Y Sam, más. ¿Y?*).

- $A\alpha\alpha A'$ (*Más, ¿y?. Y Sam*).
- $A'\alpha\alpha A$ (*Samy, y más*).

Con solo una aparición de $A$, $A'$ y tres de $\alpha$:

- $\alpha A\alpha A'\alpha$ (*Y más, y Samy*).
- $\alpha A'\alpha A\alpha$ (*Y Sam, y más. ¿Y?*).
- $A'\alpha\alpha\alpha A$ (*Samy, ¿y? Y más*).
- $A\alpha\alpha\alpha A'$ (*Más, ¿y? ¿Y? ¡Y Sam!*).

Con solo dos apariciones de $A$, $A'$ y ninguna de $\alpha$:

- $AA'AA'$ (*Más, Sam. ¡Más, Sam!*).
- $A'AA'A$ (*Sam, más. ¡Sam, más!*).
- $AAA'A'$ (*¡Más, más! Sam... ¡Sam!*).
- $A'A'AA$ (*Sam, ¡Sam! ¡Más, más!*).

Nótese que las construcciones $AA'A'A$ y $A'AAA'$ no son palíndromos. Con solo dos apariciones de $A$, $A'$ y una de $\alpha$:

- $AA'\alpha AA'$ (*Más, Samy. ¡Más, Sam!*).
- $A'A\alpha A'A$ (*Sam, más. ¡Y Sam, más!*).
- $AA\alpha A'A'$ (*¡Más, más! ¡Y Sam! ¡Sam!*).
- $A'A'\alpha AA$ (*¡Sam! ¡Samy! ¡Más, más!* ).

Con solo dos apariciones de $A$, $A'$ y dos de $\alpha$:

- $\alpha AA'AA'\alpha$ (*Y más, Sam. ¡Más, Samy!*).
- $\alpha A'AA'A\alpha$ (*Y Sam, más. ¡Sam, más! ¿Y?*).
- $A\alpha A'A\alpha A'$ (*Más, y Sam. ¡Más, y Sam!*).
- $A'\alpha AA'\alpha A$ (*Sam, y más. ¡Sam, y más!*).
- $AA'\alpha\alpha AA'$ (*Más, Samy. ¡Y más, Sam!*).
- $A'A\alpha\alpha A'A$ (*Sam, más. ¿Y? ¡Y Sam, más!*).
- Equivalentemente con $AA$ y $A'A'$ en la primera mitad del palíndromo (6 más).

Las posibilidades son infinitas. Es un problema combinatorio mostrar, para un número dado de apariciones de la frase y letra semillas, cuantos posibles palíndromos se pueden construir. Sea $\mathcal{N}(n,m)$ el número de palíndromos posible que se pueden formar empleando solo $n$ veces la frase $A \in \mathcal{F}$, $n$ veces su conjugada $A'$, y $m$ veces la letra $\alpha \in \mathcal{C}$, para $n, m \in \mathbb{N}$. El caso más sencillo es empleando una sola frase semilla, sin letra.

**Teorema 4.** *El número de palíndromos posible que se pueden formar empleando solo la frase $A \in \mathcal{F}$ y su conjugada $A'$, usando $n$ apariciones de $A$ (y por tanto otras tantas de $A'$), para $n \in \mathbb{N}$, es*

$$\mathcal{N}(n,0) = 2^n. \tag{1}$$

*Demostración.* Todo palíndromo es simétrico respecto el centro de la frase, por lo que es suficiente con analizar la primera mitad. Dado que deben aparecer tantos $A$ como $A'$, la primera del palíndromo tendrá $n$ repeticiones de $A$ o $A'$. Cada una de las subfrases podrá ser tanto $A$ como $A'$, de forma que en la segunda mitad del palíndromo, las subfrases espejo tengan tomen la conjugación contraria. Por tanto, hay $2^n$ posibilidades. Una forma diferente de verlo es la siguiente. Dada la primera mitad del palíndromo, el número de posibilidades usando $m$ subfrases conjugadas en ella es $\binom{n}{m}$. Como es conocido, $\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = 2^n$. □

Por ejemplo, para el caso de cuatro apariciones de $A$ y $A'$, la primera mitad del palíndromo puede ser: $AAA, AAA', AA'A, A'AA, AA'A', A'AA', A'A'A, A'A'A'$. Para el caso de cuatro apariciones de $A$ y $A'$, la primera mitad del palíndromo puede ser: $AAAA$, $AAAA'$, $AAA'A$, $AA'AA$, $A'AAA$, $AAA'A'$, $AA'AA'$, $AA'A'A$, $A'AA'A$, $A'A'AA$, $A'AAA'$, $AA'A'A'$, $A'AA'A$, $A'A'AA'$, $A'A'A'A$, $A'A'A'A'$. Veamos el número de palíndromos posibles empleando la frase y letra semilla simultáneamente. En este punto es preciso diferenciar entre palíndromos pares e impares.

**Teorema 5.** *El número de palíndromos pares posible que se pueden formar empleando solo $n$ veces la frase $A \in \mathcal{F}$, $n$ veces su conjugada $A'$, y $2m$ veces la letra $\alpha \in \mathcal{C}$, para $n, m \in \mathbb{N}$, es*

$$\mathcal{N}(n,2m) = 2^n \frac{(m+n)!}{m!\,n!} \tag{2}$$

*Demostración.* Todo palíndromo es simétrico respecto el centro de la frase, por lo que es suficiente con analizar la primera mitad. Dado que deben aparecer tantos $A$ como $A'$, la primera del palíndromo tendrá $n$ repeticiones de $A$ o $A'$, y $m$ apariciones de la letra $\alpha$. Habrá por tanto $n+m$ subfrases, que serán o bien $A$, $A'$ o $\alpha$. Tomando $k$ repeticiones de $A'$, tendremos

$$\binom{n+m}{m,k} = \frac{(n+m)!}{(n-k)!\,m!\,k!}$$

posibles primeras mitades de palíndromo. El número total es por tanto

$$\mathcal{N}(n,2m) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+m}{m,k} = 2^n \frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$

□

Sabiendo el caso para palíndromos pares, demostrarlo para los impares es muy sencillo:

**Teorema 6.** *El número de palíndromos impares posible que se pueden formar empleando solo $n$ veces la frase $A \in \mathcal{F}$, $n$ veces su conjugada $A'$, y $2m+1$ veces la letra $\alpha \in \mathcal{C}$, para $n, m \in \mathbb{N}$, es*

$$\mathcal{N}(n,2m+1) = \mathcal{N}(n,2m) = 2^n \frac{(m+n)!}{m!\,n!} \tag{3}$$

*Demostración.* Dado que si un palíndromo es impar, siempre debe tener una letra en el centro, una de las $\alpha$ debe ir ahí. Las otras $2m$ y las $n$ repeticiones de $A$ y $A'$ se cuentan igual que en el anterior teorema. Por tanto, el número de posibles palíndromos es el mismo que en el anterior caso. □

Los resultados de los teoremas anteriores generalizan el caso sin letras, e incluyen además los palíndromos triviales que constan de una sola letra repetida, dando siempre $\mathcal{N}(0,m) = 1$. La tabla **??** sumariza los resultados para los diferentes repeticiones de $A$ y $\alpha$.

| $A$ \ $\alpha$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 | 4 | 4 | 10 |
| 2 | 4 | 4 | 12 | 12 | 60 |
| 3 | 8 | 8 | 32 | 32 | 280 |
| 4 | 16 | 16 | 80 | 80 | 1120 |

Tabla 1: Número de posibles palíndromos $\mathcal{N}$ según el número de repeticiones de $A$ (y $A'$) y de $\alpha$.